Aus: Bericht aus dem Seminar für Didaktik der Mathematik, Univ. Bielefeld, 1982/83, 29-33. (Mit 2 späteren Anhängen)

Was trägt die "zweite Säule"? - Lineare Algebra und Analytische Geometrie auf der Sekundarstufe II

Protokoll zum Referat von StD Dr. L. Führer

Lineare Algebra und Analytische Geometrie - in der Sekundarstufe II im Feld der "Vektorgeometrie" angesiedelt - folgen didaktisch gegenwärtig unterschiedlichen Richtungen. Kernfrage ist dabei zumeist der jeweilige Anteil von Denk- und Handlungsorientiertheit im unterrichtlichen Rahmen. Und so grenzen sich gegeneinander ab:

- eine deduktiv orientierte Vektorgeometrie;
  nach Atomisierung der Inhalte erfolgt eine Vermittlung auf mehreren, an Komplexität zunehmenden Stufen. Im Zentrum dabei stehen Denk-strategien und Beweisfindung, das Erfassen von Strukturmerkmalen auf axiomatischer Grundlage.

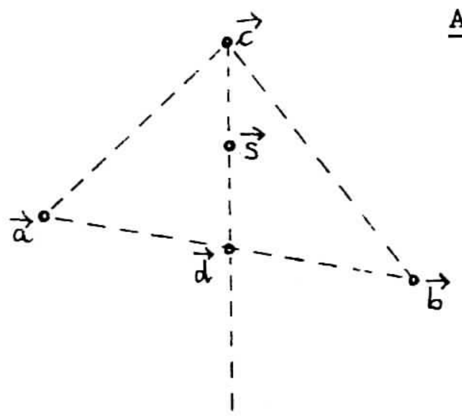
- eine numerisch-algorithmische Vektorgeometrie;
  im Mittelpunkt stehen hier Handlungsstrategien, also der Anwendungsbezug im konkret-mathematischen Zusammenhang. Transferleistungen sind nur innerhalb der Konkretion gefragt, die hinsichtlich möglicher Aktualität der Probleme sicher in starkem Maße motivierend für die Schüler ist. Mit diesem Ansatz korreliert die Forderung nach Operationalisierung der Lernziele.

- eine gemäßigt konkretisierende Vektorgeometrie;
  sie bietet sich im Spannungsfeld zwischen Denk- und Handlungsstrategien als Kompromißlösung an, denn nun können Denkstrategien am konkreten Problem entwickelt werden. Die Konkretisierung sollte aber nur so weit erfolgen, wie es gegenüber einer positiven Aufnahme und der intuitiven Basis notwendig erscheint. Das läßt Chancen für eigene Kreativität offen, verlangt zumeist aber eine gewisse Verfremdung realer Problemsituationen.
  Insbesondere kann ein solcher Ansatz auch die Raumanschauung der Schüler fördern, was an einigen Beispielen hier kurz aufgezeigt werden soll.

(a) Die Einführung in die Vektorgeometrie innerhalb der Klasse 11 kann geeignet über "Spiralen" erfolgen:
Nach Vorgabe eines Koordinatensystems kann der Kreis als Grundriß (und Ausgangsfigur) betrachtet werden. Durch die Vorgabe von Punkten mit einer Höhenfunktion ergibt sich eine Schraubendrehung. Durch Verschiebung ergibt sich die Spirale.

(b) Eine interessante Thematik ist etwa die Bestimmung des Schwerpunkts in "Dreiecksgebilden":

- im Drei-Punkte-System

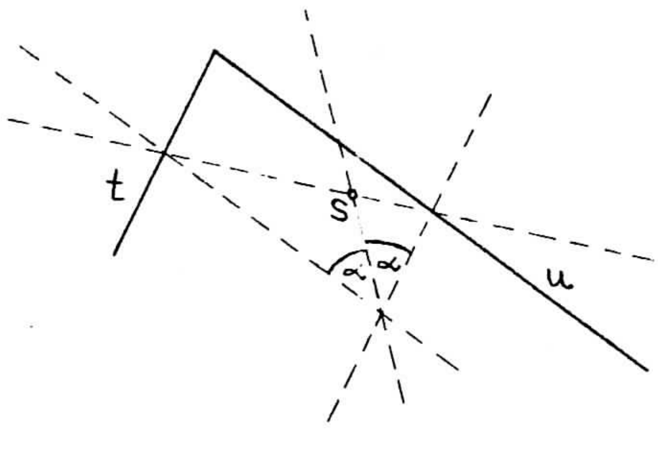


<u>Anm.</u>: Da man mit Punkten nicht rechnen kann, sind hier schon die entsprechenden Ortsvektoren eingetragen.

Bestimme zunächst: $\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$,
und dann den Schwerpunkt $\vec{s}$ durch:

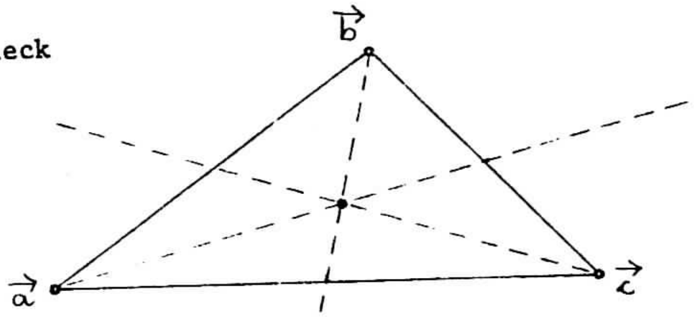
$$\vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) \quad .$$

- im Zwei-Strecken-System



Bestimme die Gerade durch die Mittelpunkte (Schwerpunkte) der Strecken t und u . Deren Schnittpunkt mit der obig eingezeichneten Winkelhalbierenden des abgebildeten Parallelogramms legt den Schwerpunkt fest.

- im Dreieck



Bestimme: $\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

(c) Schwerpunkte hängen auf sehr vielfältige Weise mit der Raumgeometrie zusammen und schaffen überdies essentielle Querverbindungen zu anderen Gebieten der Oberstufenmathematik:
- Schwerpunkte anderer Flächen- und Streckensysteme; vgl. den Aufsatz von H. Winter, Geometrie vom Hebelgesetz her, in MU 1978/5
- geometrische Deutung des Erwartungswertes als Schwerpunktabszisse im Histogramm (und der Varianz als Trägheitsmoment)
- Schwerpunkte von Flächen und Körpern über geschickte Anwendungen des Cavalieri-Prinzips; vgl. I. Schneider, Archimedes (Wiss. Buchgesellschaft 1979), oder L. Führer, Zum Gehalt der elementaren Integralrechnung in ideengeschichtlicher Sicht, MU 1981/5
- einfach Schwerpunktberechnungen in der technischen Mechanik oder Baustatik
- Zusammenhänge mit Konvexkombinationen (gewichtete Mittelwerte; lineare Optimierung) und Affinkombinationen (baryzentrische Koordinaten).

(d) Wegen der Komplexität und Armut der raumgeometrischen Theorien scheint ein ernsthaftes Bemühen um die Schulung der Raumanschauung bei Schülern nur über ein Vorgehen realisierbar, das exemplarische Beispiele als Quelle von Theoriebausteinen nimmt. Dabei erweisen sich nichttriviale Beispiele für Raumkörper als zugkräftige Motivations- und Problemlösungsobjekte.

o Solche Körper können schon im Rahmen der Affingeometrie erzeugt werden, indem man Minkowskis Idee der Komplexsummen konketisiert:

$$M + N := \{\vec{m} + \vec{n} \mid \vec{m} \in M \text{ und } \vec{n} \in N\}$$

Dabei ergeben sich bereits Überraschungen, wenn M und N nicht-komplanare Figuren (Strecken, Parallelogramme ...) sind. Noch interessanter sind natürlich Summen von Polyedern oder/und krummlinig begrenzten Flächen oder Körpern.

o Nichteuklidische Metriken auf $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^n$ haben (euklidisch interpretiert) interessante Einheitskugeln. Sie erlauben überdies überraschende Abstandsprobleme.

Stellt man auf diese Weise genügend ungewohnte analytische Beschreibungen von Körpern bereit, so fordert die zeichnerische Darstellung zwangsläufig Symmetrieüberlegungen und die Ausnutzung von Invarianten. Es läßt sich leicht einsehen, daß der übliche Bestand an Begriffen und Techniken der Kurse über Lineare Algebra und Analytische Geometrie aus solchen Problemen <u>bedarfsorientiert</u> ("genetisch") entsteht. (Vgl. meinen Aufsatz "Objektstudien in der Vektorgeometrie", DdM 1979/1.)

(e) "Äquidistanzprobleme" bieten ein reiches Feld zur Entwicklung nichttrivialer Kurven und Flächen.

o Zwei Strecken haben einen Punkt gemeinsam. Was läßt sich über die Menge aller Punkte sagen, die von beiden Strecken gleichweit entfernt sind?
(Variationen dieser Aufgabenstellung führen zwanglos zur Kegelschnittlehre.)

(f) Mit einfachen Mitteln des computergestützten Zeichnens lassen sich viele Standardthemen der Darstellenden Geometrie <u>an Beispielen</u> strukturell vertiefen.

o In einer Ebene ist ein Dreieck willkürlich vorgegeben. Läßt es sich als Schatten des Standardtetraeders unter Parallelprojektion deuten (unter Zentralprojektion)?

Einfache Projektionen erfordern wenig technische Hilfsmittel aus der Vektorgeometrie, eignen sich also als Einstiegsprobleme zu diesen Werkzeugen:

- Parallelprojektion in den Aufriß ist berechenbar, sobald Geraden in Parameterdarstellung zur Verfügung stehen.
- Senkrechte Projektion auf eine Gerade (Lotfußpunktbestimmung über Abstandsminimierung oder über Ansatz eines pythagoreischen Dreiecks) liefert rechnerisch das Innere Produkt
- Orthogonalprojektion auf eine Ebene ist mit denselben Mitteln berechenbar, wenn die Ebene in Parameterform orthogonal aufgespannt wird.
- Zentralprojektion in den Aufriß (oder in andere Ebenen) führt lediglich auf Schnittpunktsberechnungen von Geraden und Ebenen.

(g) Eine bescheidene Einführung in die Grundtatsachen der mathematischen Erd- und Himmelskunde kann elegant aus der Beziehung zwischen orthonormalen Dreibeinen (Bewegungen, Isometrien) hergeleitet werden; vgl. etwa K. Kommerell, Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik (Leipzig 1936). Hier könnte das Studium räumlicher Kongruenzabbildungen (bis hin zum Dreispiegelungssatz) beweisen, daß es nicht nur reine "Klassifikationswut" dokumentiert, sondern etwas zur Erkenntnis des Lernenden beizutragen vermag.

Unterrichtserfahrungen mit den drei genannten Typen vektogeometrischer Lehrgänge zeigen, daß jede Form früher Systematisierung motivationsfeindlich und inhaltlich trivialisierend wirkt. Die Darstellung der Vektorgeometrie als glatte, scheinbar abgeschlossene oder gar deduktiv verbrämte Theorie konterkariert die tatsächliche pragmatische Verwendung der Bausteine in Wissenschaft und Technik. Es scheint, als hingen die üblichen Motivationsprobleme vor Ort schlicht damit zusammen, daß Schüler intuitiv spüren, daß selbst die rudimentärsten Fähigkeiten zur Raumanschauung mehr leisten als ihre Lehrbücher. Hier kann nur nichttriviale, wenn auch elementare Mathematik helfen.

Aufbau gängiger Kurse in Analytischer Geometrie

KRÄMER/HÖWEL-MANN/KLEMISCH: A.G.&L.A. (1980)	424 S.	BARTH/KRUMBA-CHER: Anschauliche A.G. (1993)	280 S.	LAUTER/DRAAF/ U.A: A.G. & L.A. (1990)	400 S.
Gls., Gauß-A., Det.	30 S	=	33 S		
Pfeilkl., Vektorr.	30 S	Pte., Vekt., Koord., TV	55 S	Pte., Vekt., Koord., TV, Lin. Unabh., Basis, Dim.	
Lin. Unabh., Basis, Dim., Teilverh.	52 S	=	23 S		50 S
Koord. (ab S. 113!)		Abstr. Vektorr.(*)	12 S		
Geraden	24 S	Ger./Ebenen im Raum	66 S	Ger./Ebenen	
					26 S
Ebenen	65 S				
				Gls.	
Ger./Ebenen	14 S				35 S
Skalarprod., N-Form (ab S. 184!)	85 S	=	57 S	=	52 S
(*) Vektorprod.,Spatpr., Ger./Eb. in Det.-F.	35 S	(*) Vektorprod.	14 S	Vektorprod., Spatpr....	34 S
Kreis, Kugel, Tang., Pol	36 S			=	30 S
(*) Affine eb. Abb.	60 S			Matrizen, Vr., Basis, Dim., affine Abb.	125 S
				Kegelschnitte	20 S

Der kleine Häwelmann

Das Figurentheater Berlin gastiert am Sonntag, 19. Juni, um 15 Uhr mit einem Puppenspiel für Kinder ab drei Jahren im Gustav-Heinemann-Haus, Waldenburger Ring 44. Gespielt wird das Stück „Der kleine Häwelmann" nach der gleichnamigen Novelle von Theodor Storm. Weitere Aufführungen finden am Montag um 10 und 15 Uhr sowie am Dienstag um 10 Uhr statt. Karten können unter ☎ 66 83 109 vorbestellt werden. (pt)

GK Vektorgeometrie (Köln, Sommer 1992) ([illegible])

THEMEN	ANWENDUNGEN
Punkt, Vektor, Länge, Betrag, Konvexk., Richtungsvektor, Geraden, Spurpunkte	Würfel, Pyramiden (auch Vol.), Dachkörper
Schnittkanten, Ebenenschnitt (Aufriß,...)	Kuboktaeder, Fernsehturm
Teilpunkte, Teilverhältnisse	Schrägbilder von Kreisen, Kugeln
Raumkurven, Tangente, Geschwindigkeit, Beschleunigung	Kollisionskurs, Kreis als Raumkurve, Lissajous-Kurve, Schraube, Parabel
Parallel- und Zentralprojektion (i.d.Aufr.)	(Invarianten als Zeichenhilfe)
Ebenen in P-Form, Linearkombination	räuml. Parabel ist eben, Dachkanten, Durchdringungen, Kugelkontur bei PP
Schnitt G-E, E-E, N-Form, Sarrus-Regel	Durchdringung zweier Pyramiden
Skalarprodukt (inneres Produkt), Eigenschaften	1. Projektionssatz, Kosinussatz, Orthonormierung
Hesse-Form, Abstände	Winkel zwischen G. und E., windschiefe G., Parabeln in dynam. Koordinaten, Bewegung als Aufleitung von f"(t), Schattengrenze, Konturellipse, gebremster Fall auf schiefer Ebene
Vektor- u. Spatprod., Orientierung, Ausblick auf die L.A.	2. u. 3. Proj'satz, Orthogonalproj., Computergrafik, Kartenprojektionen